

1. Quel est le mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme ?

Étudions le mouvement d'un projectile dans une région de l'espace où le champ de pesanteur peut être considéré comme uniforme.

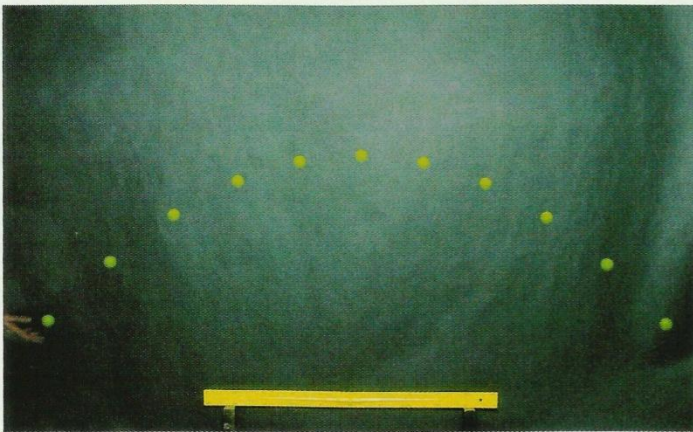
1.1 Étude expérimentale

Une bille est lancée avec une vitesse \vec{v}_0 faisant un angle α avec le plan horizontal. Étudions le mouvement de son centre d'inertie dans le référentiel terrestre.

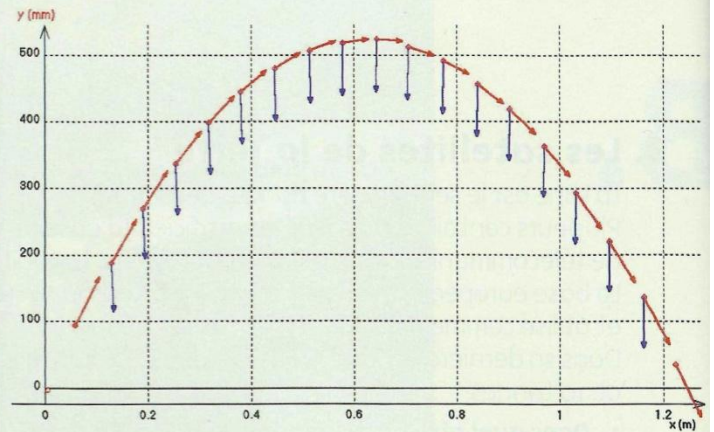
Activité 1

Quel est le mouvement d'une bille dans le champ de pesanteur ?

- Filmer une bille lancée dans un plan perpendiculaire à l'axe de visée d'un caméscope [Doc. 1].
 - Analyser le film à l'aide d'un logiciel de traitement d'images.
 - Faire tracer les vecteurs vitesse et accélération du centre d'inertie de la bille pour chacune de ses positions.
1. Au cours du mouvement, comment varie le vecteur vitesse ? le vecteur accélération ?
 2. Comparer le vecteur accélération avec le vecteur \vec{g} [Doc. 2].



Doc. 1 Étude, image par image, d'une bille lancée dans le plan frontal du caméscope.



Doc. 2 Vecteurs vitesse (en rouge) et accélération (en bleu) au cours du mouvement.

> Observation

Le vecteur vitesse du centre d'inertie de la bille change de valeur et d'orientation au cours du mouvement.

Le vecteur accélération est constant, vertical descendant.

Le vecteur accélération a la direction et le sens du vecteur champ de pesanteur \vec{g} et sa valeur est de l'ordre de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

> Interprétation

- Le système considéré est la bille.
- Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
- Une fois lancée, la bille est soumise à son poids \vec{P} et à l'action de l'air que l'on peut négliger : la chute est dite libre.
- Appliquons la deuxième loi de NEWTON à la bille :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G.$$

Avec $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, on a : $\vec{a}_G = \vec{g}$.

Lors de la chute libre d'un mobile, le vecteur accélération \vec{a}_G de son centre d'inertie est égal au vecteur champ de pesanteur \vec{g} :

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

Ce résultat a déjà été établi au chapitre précédent lors de l'étude d'un mouvement de chute libre verticale.

1.2 Équations horaires

Déterminons les caractéristiques du mouvement du centre d'inertie G d'un projectile lancé avec une vitesse initiale non nulle. C'est le cas du mouvement de l'athlète lors d'un saut en longueur vu dans l'Activité préparatoire A, page 249. Pour cela, recherchons les équations horaires du mouvement.

Choisissons un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel terrestre [Doc. 3] :

- le vecteur unitaire \vec{k} est vertical ascendant ;
- le plan (\vec{i}, \vec{k}) contient le vecteur vitesse initiale \vec{v}_0 . Notons α , l'angle (\vec{i}, \vec{v}_0) ;
- l'origine O coïncide avec la position initiale du centre d'inertie G du projectile.

Dans ce repère et à la date $t = 0$, nous avons [Doc. 4] :

$$\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos \alpha \\ \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z}_0 = v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

À une date t quelconque, G a pour coordonnées (x, y, z) , sa vitesse $\vec{v}_G(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ et son accélération $\vec{a}_G(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ [Doc. 3].

➤ Quelle que soit la date t , nous avons :

$$\vec{a}_G = \vec{g} \quad \text{et} \quad \vec{g} = -g \cdot \vec{k} \quad \text{avec} \quad g > 0.$$

Nous en déduisons les coordonnées de l'accélération \vec{a}_G de G dans ce repère :

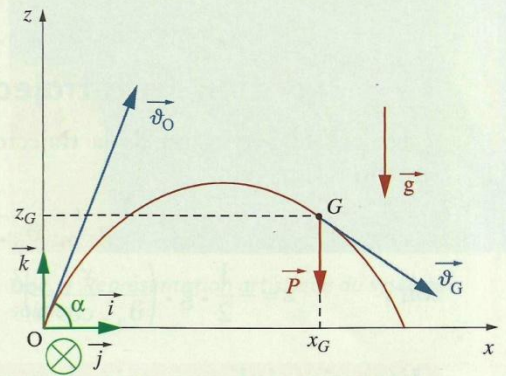
$$\vec{g} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a}_G \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

➤ Les coordonnées du vecteur vitesse \vec{v}_G sont des primitives des coordonnées du vecteur accélération \vec{a}_G . Compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

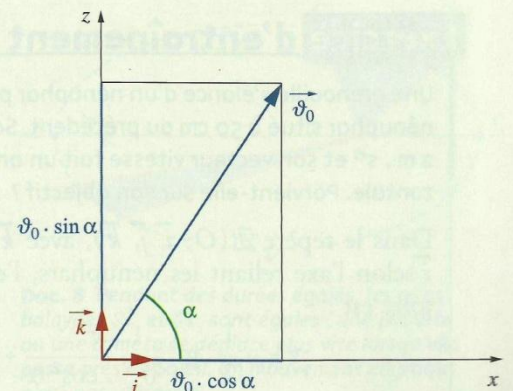
$$\vec{v}_G \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos \alpha \\ \dot{y} = \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z} = -g \cdot t + \dot{z}_0 = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

➤ Les coordonnées du vecteur position \vec{OG} sont des primitives des coordonnées du vecteur vitesse \vec{v}_G . Compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

$$\vec{OG} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + x_0 = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y = y_0 = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + z_0 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$



Doc. 3 Trajectoire parabolique dans le cas d'une chute libre avec vitesse initiale.



Doc. 4 Coordonnées du vecteur vitesse à l'instant initial : $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \vec{k}$.

Nous déduisons de ces équations horaires trois résultats importants :

- $y = 0$: la trajectoire du centre d'inertie G est dans le plan vertical (xOz) contenant \vec{v}_0 .
- $x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$: le mouvement de la projection de G sur l'axe horizontal (Ox) est uniforme.
- $z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t$: le mouvement de la projection de G sur l'axe vertical (Oz) est uniformément accéléré.

1.3 Équation de la trajectoire

On établit l'équation de la trajectoire en éliminant le paramètre t des équations horaires :

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

soit :

$$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

L'équation de la trajectoire du centre d'inertie d'un projectile est :

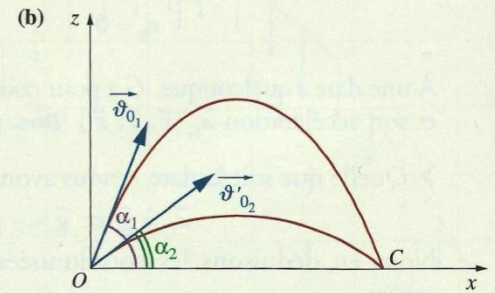
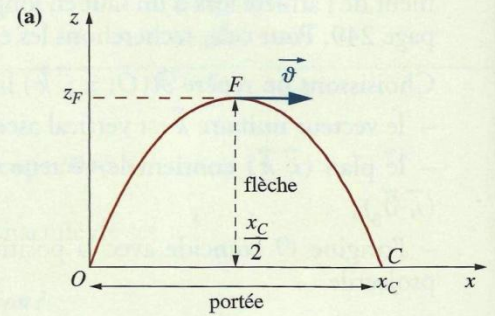
$$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x$$

La trajectoire est une portion de parabole située dans le plan vertical contenant \vec{v}_0 .

La portée horizontale est la distance $d = OC$ [Doc. 5a] entre le point O de lancement et le point C de chute. On détermine $d = x_C$ pour $z_C = 0$.

La portée est la même pour deux angles de tir complémentaires (tir en cloche ou tir tendu) [Doc. 5b]. On démontre que la portée est maximale pour $\alpha = 45^\circ$ (voir l'exercice résolu 1, page 263).

La flèche est l'altitude maximale atteinte par G (position F). Au point F , le vecteur vitesse \vec{v} est horizontal : $\dot{z}_F = 0$.



Doc. 5 Trajectoires d'un projectile.

Exercice d'entraînement 1

Une grenouille s'élance d'un nénuphar pour atteindre un autre nénuphar situé à 50 cm du précédent. Sa vitesse initiale est de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et son vecteur vitesse fait un angle $\alpha = 55^\circ$ avec l'horizontale. Parvient-elle sur son objectif ?

Dans le repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec \vec{k} vertical ascendant et \vec{i} selon l'axe reliant les nénuphars, l'équation de la trajectoire est :

$$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x.$$

La longueur du saut, obtenue pour $z = 0$, est :

$$x = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g}.$$

La longueur du saut dépend de la valeur et de l'orientation du vecteur vitesse initiale (voir l'Activité préparatoire A, page 249).

Numériquement : $x = 0,38 \text{ m}$. La grenouille tombe à l'eau !

> Pour s'entraîner : Ex. 1, 4, 5 et 7